Sistemi dinamici - **Attività 2**

Il modello logistico

Paolo Lazzarini - p.lazzarini@tin.it

Come si è detto, una popolazione cresce esponenzialmente per un primo breve periodo per poi rallentare la sua crescita tendendo alla massima capacità dell'ambiente. Dobbiamo modificare il nostro modello matematico rispetto a quello di una crescita puramente esponenziale. Riferiamoci alla stessa popolazione di conigli dell'attività precedente; un modello ragionevole (verificabile sperimentalmente) è il modello *logistico*

$$c_n = c_{n-1} + Ac_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{c_{n-1}}{M}\right)$$

dove M è una costante che esprime la popolazione massima possibile (nel nostro caso M sarà il massimo numero possibile di conigli). Ragioniamo sul fattore $\left(1 - \frac{c_{n-1}}{M}\right)$ che non compariva nella successione esponenziale. Quando il valore c_{n-1} è piccolo rispetto ad M, il rapporto $\frac{c_{n-1}}{M}$ è prossimo a zero e dunque il nostro fattore è prossimo a 1; ne segue che la successione logistica differisce di poco da quella esponenziale. Ad esempio se fosse c_{n-1}=100 ed M=3000 si avrebbe $\left(1 - \frac{c_{n-1}}{M}\right) \cong 0{,}97$.

Ma al crescere di c_{n-1} (rispetto ad M) il nostro fattore determina un rallentamento via via più marcato della crescita. Quando c_{n-1} è minore di M ma prossimo ad M il rapporto $\frac{c_{n-1}}{M}$ è prossimo ad 1 e dunque il nostro fattore è prossimo a zero; ne segue che la successione logistica tende alla successione **costante** $c_n = c_{n-1}$. E' il momento di fare delle verifiche con Derive, ponendo, ad esempio, M=3000

```
#1:   A := 0.1

#2:   c0 := 100

#3:   M := 3000

      conigli(n, c, cont) :=
        Prog
          c := c0
          cont := 0
#4:       Loop
            If cont = n
               RETURN c
            c := c + A·c·(1 - c/M)
            cont := cont + 1

#5:   TABLE(conigli(n), n, 0, 10)
```

#6:

$$\begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 1 & 109.6666666 \\ 2 & 120.2324407 \\ 3 & 131.7738234 \\ 4 & 144.3723944 \\ 5 & 158.1148543 \\ 6 & 173.0929961 \\ 7 & 189.4035896 \\ 8 & 207.1481579 \\ 9 & 226.4326284 \\ 10 & 247.3668334 \end{bmatrix}$$

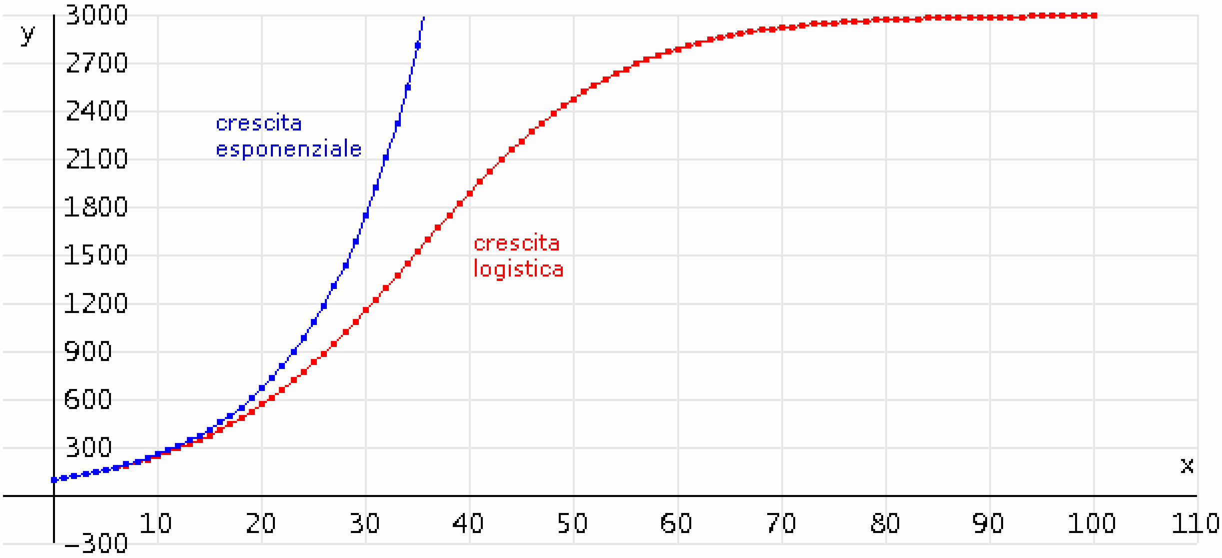
Come vedi, in una prima fase i valori conigli(n) calcolati col modello logistico non differiscono di molto da quelli calcolati col modello esponenziale (confronta i primi 10 valori delle due tabelle). Ma al crescere di n …

#7: TABLE(conigli(n), n, 90, 100)

#8:

90	2990.498331
91	2991.445489
92	2992.298501
93	2993.066673
94	2993.758404
95	2994.381265
96	2994.942086
97	2995.447024
98	2995.901631
99	2996.310908
100	2996.679363

Abbiamo la conferma che il valore conigli(n), dopo una prima fase “quasi” esponenziale, tende poi a stabilizzarsi attorno al valore M=3000. Ecco i due grafici, quello esponenziale e quello logistico



Prova tu a fare altri esperimenti cambiando le costanti c_0 ed M. Prova anche a considerare un valore iniziale del numero dei conigli maggiore della capacità massima dell’ambiente (ad esempio c_0=4000 e M=3000); cosa succede?

Chiediamoci infine: è possibile esprimere il termine n-esimo della successione logistica mediante una formula chiusa come si era fatto per la successione esponenziale? La risposta ti sorprenderà e ti farà riflettere: no, non è possibile.